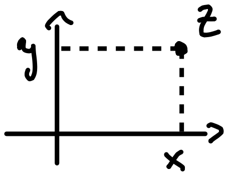
Rappels : $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe

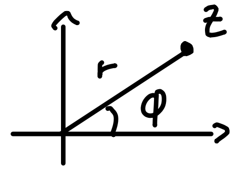
Représentation cartésienne :

$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$



Représentation Polaire :

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

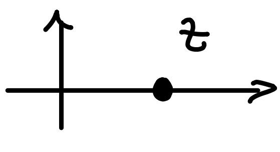
$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

φ on le trouve en faisant un dessin + trigo

$\varphi = \arg(z)$ ⚠ arg n'est a priori pas une fonction.

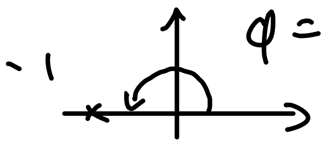
Exemple 2.8

(iii) $z = 14 = 14 + i0$, $|z| = \sqrt{14^2 + 0^2} = 14$



$\varphi = 0$, $z = 14(\cos(0) + i\sin(0))$

(iv) $z = -1 = -1 + i \cdot 0$, $\quad |z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$



$\varphi = \pi \qquad z = 1 \cdot (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Proposition 2.9

Soient z, z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$. Alors,

(i) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

$\hookrightarrow$ si φ est un argument de z alors, $-\varphi$ est un argument de $\bar{z} = x - iy$

(ii) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$\hookrightarrow$ si φ_1 est un argument de z_1 et φ_2 est un argument de z_2, alors, $\varphi_1 + \varphi_2$ est un argument de $z_1 \cdot z_2$

(iii) si $z \neq 0$, $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$

$\hookrightarrow$ si φ est un argument de z, $-\varphi$ est un argument de $1/z$.

§ 2.2 La fonction exponentielle, les formules d'Euler & de Moivre.

<u>Définition 2.11</u> (fonction exponentielle)
On définit l'exponentielle complexe par

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z = x+iy \longmapsto \exp(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

ou, en d'autres termes,

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}\big(\cos(\operatorname{Im}(z)) + i\sin(\operatorname{Im}(z))\big)$$

<u>Exemples 2.12</u> (i) si $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{x+i\cdot 0} = e^x(\cos(0) + i\sin(0)) = e^x$$

exponentielle complexe   exponentielle réelle

(ii) $z = i$, $e^i = e^{0+i\cdot 1} = e^0(\cos(1) + i\sin(1))$

$$= \cos(1) + i\sin(1)$$

(iii) $e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = \underbrace{e^0}_{1}(\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i\underbrace{\sin(\pi)}_{=0})$

$= -1$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Remarque 2.13

On peut utiliser l'exponentielle pour écrire

$$z = |z| e^{i \arg(z)}$$

Proposition 2.14

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

(i) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$

(ii) $\arg(e^z) = \mathrm{Im}(z)$

Lrs $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de e^z

(iii) $e^{z + i2n\pi} = e^z$

(iv) Si $e^{z_1} = e^{z_2}$, alors, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $z_1 = z_2 + i2k\pi$

(v) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$

(vi) $(e^z)^n = e^{n\cdot z}$

(vii) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

<u>Théorème 2.15</u> (Formules d'Euler)

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

<u>Remarque 2.16</u> (i) On peut définir avec ces formules $\sin(z)$ et $\cos(z)$ pour des nombres complexes :

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

(ii) On peut utiliser les formules d'Euler pour (re-)trouver des formules trigonométriques :

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{i\cdot 2x} + 2 + e^{-i2x}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{e^{i\cdot 2x}+e^{-i2x}}{2}}_{\cos(2x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Théorème 2.17 : Formule de Moivre.

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)$$

Preuve Soit $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ quelconques

Alors,

$$(\underbrace{\cos\varphi + i\sin\varphi}_{e^{i\varphi}})^n = (e^{i\varphi})^n$$

$$= e^{i\cdot\varphi\cdot n} = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\varphi)$$

■

Exemple 2.18

(i) Calculons $(1+i)^8$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^8$$

$$= \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^4\left(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right)$$

$$= 16\,(1 + i\cdot 0) = 16.$$

§ 2.3 Résolution d'équations polynomiales dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.19 (racines $n^{\text{ièmes}}$) $z^n = w$

Soit $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Alors, $\exists\, z_0, z_1, \dots, z_{n-1} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ distincts

tq $\forall\, k = 0, \dots, n-1$,

$$z_k^n = w$$

Remarque 2.20

Cette proposition nous assure l'existence de

n solutions distinctes de l'équation $z^n = w$. Comment les trouver?

Étape 1 : Écrire w sous forme polaire : $w = |w| e^{i \cdot \arg(w)}$

Étape 2 : Retrouver tous les arguments de w : pour $k \in \mathbb{Z}$

$$w = |w| e^{i(\arg(w) + 2k\pi)}$$

Étape 3 : Multiplier tous les exposants par $\frac{1}{n}$:

$$|w|^{1/n} \cdot e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}$$

Étape 4 prendre $k = 0, 1, \dots, n-1$,

$$z_k = |w|^{1/n} e^{i \frac{\arg(w) + 2k\pi}{n}}$$

Définition 2.21 (Racines $n^{\text{ième}}$ de w)

Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbb{N}^*$

$z_k = |w|^{1/n} e^{i \frac{\arg(z) + 2k\pi}{n}}$ sont appelées les racines $n^{\text{ièmes}}$ de w.

Exemple 2.22

(i) Les racines $4^{\text{èmes}}$ de 1

$|1| = 1$, $\arg(1) = 0$.

E1| $1 = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$

E2| $1 = 1 \cdot e^{i 2k\pi}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

E3| $1^{1/4} e^{i \frac{2k\pi}{4}} = e^{i \frac{k\pi}{2}}$

E4| $k = 0, 1, 2, 3$

$z_0 = e^{i \cdot \frac{0 \cdot \pi}{2}} = 1$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,

$z_2 = e^{i\pi} = -1$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

(ii) Les racines $2^{\text{èmes}}$ de i, $|i| = 1$,

$\arg(i) = \frac{\pi}{2}$.

E1| $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

E2| $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

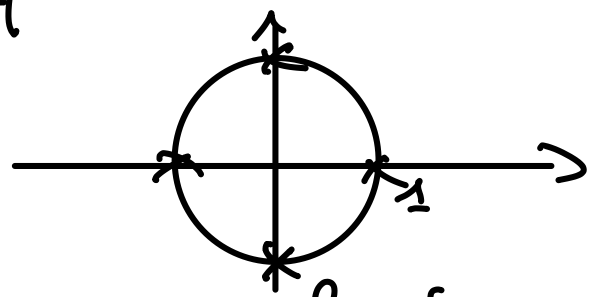
E3| $e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)}$

E4| $k = 0, 1$.

$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque 2.23

(i) Les racines $n^{\text{ièmes}}$ sont toujours uniformément réparties sur un cercle de rayon $|w|^{1/n}$



(ii) Si $n=2$. $z = x+iy$ est l'inconnue

$w = a+ib$ est la donnée.

$z^2 = w \iff x^2-y^2+i2xy = a+ib$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a & \text{(partie réelle)} \\ 2xy = b & \text{(partie imaginaire)} \end{cases}$

On distingue 2 cas:

Cas 1 : $b \neq 0$

$y = \dfrac{b}{2x}$

$a = x^2-y^2 = x^2-\left(\dfrac{b}{2x}\right)^2 = x^2-\dfrac{b^2}{4x^2}$

$\Rightarrow (x^2)^2 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0$

On résout pour x^2 puis x

⚠ x doit être réel.

Puis on pose $y = \frac{b}{2x}$, $z = x + iy$

sera une racine $2^{ème}$ de w.

Cas 2 : $b = 0$.

Si $a \geq 0$, $x = \pm\sqrt{a}$, $y = 0$

Si $a \leq 0$, $x = 0$, $y = \pm\sqrt{|a|}$

Exemple 2.24

$z^2 = 3+4i$. $\qquad b = 4 \neq 0$.

$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$.

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$= \begin{cases} - & -1 \\ + & 4 \end{cases}$$

On jette $x^2 = -1$ pas de solution réelle.

$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

$x = -2$, $\quad y = \frac{4}{2(-2)} = -1$.

$\Rightarrow z_0 = -2-i$

$x = 2,$ $\quad y = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$

$z_1 = 2 + i$

Vérifions : $z_k^2 = 4 - 1 + i\, 2 \cdot 2 \cdot 1 = 3 + 4i$

Théorème 2.25 : Théorème fond. de l'algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tq $a_n \neq 0$ et le polynôme de degré n :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$$

Alors, p admet n racines dans $\mathbb{C}$, Plus précisément, $\exists z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tq

(i) $\forall k = 1, \ldots, n,$ $p(z_k) = 0$

(ii) $P(z) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$

Remarque 2.26

(i) La factorisation de polynômes et la résolution d'équation polynomiales étant liés (thm 1.48, $p(a)=0 \Leftrightarrow p(z)$ se factorise par $z-a$.) le théorème garantit l'existence d'une factorisation et l'existence de solutions.
Mais, pas de méthode pour trouver les solutions

(ii) Une méthode pour trouver une factorisation est de deviner une racine z_0 et faire la division euclidienne de p par $z-z_0$

Remarquons que

$$a_0 = p(0) = a_n \cdot \prod_{k=1}^{n} (0 - z_k) = (-1)^n a_n \prod_{k=1}^{n} z_k$$

Donc, $\frac{a_0}{a_n}$ est au signe près le produit de toutes les racines.

Donc, si $\frac{a_0}{a_n}$ est un nombre entier commencer par tester ses diviseurs au signe près.

<u>Exemple 2.27</u> :

$$p(z) = -3z^3 - (6-6i)z^2 + (3+12i)z + 6.$$

$$\frac{a_0}{a_n} = \frac{6}{-3} = -2 \quad \rightarrow \text{on teste } -2, -1, 1, 2.$$

$$p(-2) = 3\cdot 8 - (6-6i)\cdot 4 - (3+12i)\cdot 2 + 6 = 0$$

$$-3z^3-(6-6i)z^2+(3+12i)z+6 \;\Big|\; z+2$$

$$-3z^2+6iz+3$$

$$-\left(-3z^3-6z^2\right)$$

$$6iz^2+(3+12i)z+6$$

$$-\left(6iz^2+12iz\right)$$

$$3z+6$$

$$-3z+6$$

$$0$$

$$\Rightarrow -3z^3-(6-6i)z^2+(3+12i)z+6 = (z+2)\left(-3z^2+6iz+3\right)$$

$$-3z^2+6iz+3$$

$$\frac{-6i\pm\sqrt{(6i)^2-4\cdot(-3)\cdot 3}}{-6} = \frac{-6i\pm\sqrt{0}}{-6} = i$$

$$\Rightarrow -3z^2+6iz+3 = -3(z-i)^2$$

$$\Rightarrow -3z^3-(6-6i)z^2+(3+12i)z+6 = -3(z+2)(z-i)^2$$

Remarque 2.28

Sur $\mathbb{R}$, on sait que les solutions de $ax^2+bx+c=0$, sont données par $-\frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ tant que $b^2-4ac \geq 0$

Dans les complexes, on peut faire la même chose, mais on remplace $\pm\sqrt{b^2-4ac}$ par $+\omega_1$ et $+\omega_2$ où ω_1 & ω_2 sont les deux racines 2ièmes complexes de b^2-4ac.

(ou $\pm\omega_1$ vu que $\omega_1 = -\omega_2$)

$b^2-4ac \geq 0$, les deux racines compl. de b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$

Proposition 2.29 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \boxed{\mathbb{R}}$, tq $a_n \neq 0$ et le polynôme à coefficients réels

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Alors, les racines sont réelles ou des paires de racines complexes conjuguées.

Exemple 2.31

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$$

$\rightarrow \frac{a_0}{a_n} = -2 \rightarrow$ on teste $-2, -1, 1, 2$.

$$P(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0.$$

$$
\begin{array}{l|l}
z^3 - 3z^2 + 4z - 2 & z-1 \\
\hline
-(z^3 - z^2) & z^2 - 2z + 2 \\
\quad -2z^2 + 4z - 2 & \\
\quad -(-2z^2 + 2z) & \\
\quad\quad 2z - 2 & \\
\quad\quad -(2z - 2) & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = (z-1)(z^2 - 2z + 2)$$

$$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$$

$$\omega_1 = -2i, \qquad \omega_2 = 2i$$

$$\Rightarrow \frac{2-2i}{2} = 1 - i$$

$$\frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

$$p(z) = (z-1)(z-1+i)(z-1-i)$$